

Wprowadzenie do logiki  
Zdania, cz. I  
Wprowadzenie do Klasycznego Rachunku Zdań

Mariusz Urbański

Wydział Psychologii i Kognitywistyki UAM  
Mariusz.Urbanski@amu.edu.pl

# Plan gry:

- 1 Czym są zdania? Co znaczą i co oznaczają?
- 2 Język Klasycznego Rachunku Zdań – syntaktyka
- 3 Język Klasycznego Rachunku Zdań – semantyka
- 4 Schematy zdań języka potocznego w języku KRZ
- 5 Metoda zerojedynkowa

- 1 Czym są zdania? Co znaczą i co oznaczają?
- 2 Język Klasycznego Rachunku Zdań – syntaktyka
- 3 Język Klasycznego Rachunku Zdań – semantyka
- 4 Schematy zdań języka potocznego w języku KRZ
- 5 Metoda zerojedynkowa

# Co to jest zdanie?

Zdanie jest taką formą wypowiedzenia, w której w funkcji orzeczenia występuje osobowa forma czasownika. (...) Zdanie ma budowę dwuczłonową. Zawsze występuje w nim nazwa (...) czyli podmiot, i czasownik (...) który mówi, co podmiot robi, co się z nim dzieje, czym jest, jakie ma cechy, jakie w nim zachodzą zmiany, gdzie się znajduje, itp. Ten człon nazywamy orzeczeniem, ponieważ mówi on coś o przedmiocie, czyli coś o nim orzeka.

Piotr Bąk, *Gramatyka języka polskiego*

Sformułowanie ścisłej definicji zdania, która byłaby jednocześnie na tyle uniwersalna, aby mogła się odnosić do każdego języka, jest przedsięwzięciem niezwykle trudnym.

Jerzy Bańczerowski, Jerzy Pogonowski, Tadeusz Zgółka,  
*Wstęp do językoznawstwa*

# Co to jest zdanie?

Dalej postugiwać się będziemy dość specyficznym pojęciem zdania:

## Zdanie w sensie logicznym

to takie wyrażenie, które posiada wartość logiczną.

Tylko taki sens pojęcia zdania będzie nas dalej interesował. Mówiąc dalej o zdaniach będziemy mieli na myśli wyłącznie zdania w sensie logicznym.

# Co zdania oznaczają? Co jest ich znaczeniem?

Odpowiedź na pytania o znaczenie i oznaczanie w przypadku nazw była (w zasadzie) prosta. Z definicji, nazwa **oznacza** swoje desygnaty. Co uznamy za **znaczenie** nazwy – to zależy od założonej koncepcji znaczenia, ale gwoli prostoty, przynajmniej w przypadku nazw generalnych, znaczenie możemy utożsamić z *konotacją* (albo za Ajdukiewiczem przyjąć, że znaczeniami nazw są *pojęcia*). Ale co **znaczą** i co **oznaczają** zdania?

	nazwa	zdanie
znaczenie	konotacja, ew. pojęcie	?
oznaczanie	desygnaty: rozmaito rodzaju przedmioty, niekoniecznie fizyczne	??

# Co jest znaczeniem zdań?

Znaczeniem zdania (w sensie logicznym) jest **sąd**:

**Sądem** nazywamy każdą myśl, która zdaje sprawę z pewnego stanu rzeczy, czyli która zdaje sprawę z tego, że tak a tak jest lub że tak a tak nie jest.

Kazimierz Ajdukiewicz, *Logika pragmatyczna*

# Co zdania oznaczają?

Możliwe są co najmniej dwie odpowiedzi:

- odpowiedź typu F, jak *Frege*;
- odpowiedź typu W, jak *Wittgenstein*.



## DISCLAIMER

Poniższe odpowiedzi są odpowiedziami typu *folk* i pretendują jedynie do bycia użytecznymi-w-danej-chwili, nie zaś do bycia Tymi-Jedynie-Właściwymi, w szczególności zaś nie są rzetelnymi sprawozdaniami koncepcji filozoficznych. Pojawiające się niżej nazwiska na „F” i „W” użyte są w roli symbolicznej, nie zaś jako składniki argumentów odwołujących się do autorytetu.

# Co zdania oznaczają? Odpowiedź typu F

Rozważmy zdanie:

$$2 + 2 = 4$$

Podstawmy na miejsce nazwy '2 + 2' inną, która jednak będzie miała dokładnie to samo odniesienie przedmiotowe, np. '5 - 1':

$$5 - 1 = 4$$

Ponieważ nazwy '2 + 2' oraz '5 - 1' odnoszą się do jednego i tego samego obiektu, więc możemy rozsądnie przyjąć, że odniesienie przedmiotowe obu powyższych zdań jest takie samo (ponieważ o tym samym opowiadają).

Ale co właściwie (semantycznie!) nie zmienia się w wyniku takiego podstawienia?

## Co zdania oznaczają? Odpowiedź typu F, c.d.

Nie zmienia się **wartość logiczna**: albo oba zdania są prawdziwe, albo oba są fałszywe. Odpowiedź typu F brzmi zatem:

**odniesieniem przedmiotowym zdania jest jego wartość logiczna.**

Zdania  $2 + 2 = 4$  oraz  $5 - 1 = 4$  znaczą co innego, ale oznaczają to samo: Prawdę. Co więcej, wszystkie zdania prawdziwe oznaczają to samo – Prawdę – i wszystkie zdania fałszywe oznaczają to samo – Fałsz.

# Co zdania oznaczają? Odpowiedź typu W

Zdania zbudowane są z wyrażień, które odpowiadają pewnym elementom świata pozajęzykowego. Owe elementy tworzą stany rzeczy. I tak, na przykład, jeśli nazwa „Sokrates” oznacza wiadomo kogo, a predykat „jest mądry” odnosi się do mądrości, to zdanie „Sokrates jest mądry” opisuje stan rzeczy polegający na tym, że pewien obiekt – Sokrates – posiada określoną własność – mądrość.

# Co zdania oznaczają? Odpowiedź typu W, c.d.

Odpowiedzi typu W brzmi zatem:

**odniesieniem przedmiotowym zdania jest stan rzeczy, który jest przez owo zdanie opisywany.**

W myśl odpowiedzi typu W zdania ' $2 + 2 = 4$ ' oraz ' $5 - 1 = 4$ ' nie tylko znaczą co innego ale i co innego oznaczają, gdyż mówią o różnych przedmiotach (jedno o liczbie 2, drugie o liczbach 5 i 1) oraz o różnych funkcjach (jedno o dodawaniu, drugie o odejmowaniu) – a zatem opisują różne stany rzeczy.

# Co zdania oznaczają? Co jest ich znaczeniem?

	nazwa	zdanie
znaczenie	konotacja, ew. pojęcie	sąd
oznaczanie	desygnaty: rozmaitego rodzaju przedmioty, niekoniecznie fizyczne	Prawda/Falsz <hr/> stan rzeczy

# I co z tego?

Te dwa pomysły na semantyczne korelaty zdań dobrze charakteryzują intuicje, leżące u podstaw semantyk dwóch systemów formalnych, którymi będziemy się dalej zajmować, systemów z dwóch różnych logicznych „półek”:

- odpowiedź typu F – **Klasycznego Rachunku Zdań (KRZ)**;
- odpowiedź typu W – **Klasycznego Rachunku Predykatów (KRP)**.

Póki co systemami formalnymi będziemy się interesować z punktu widzenia ich związków z językiem potocznym. Każdy system formalny, interpretowany z takiego punktu widzenia, zawiera jakieś uproszczenia – co znaczy mniej więcej tyle, że nadaje się do analizy tylko pewnego fragmentu języka potocznego i tylko z pewnej perspektywy.

Nb., chwilowo nie zanosimy się, żebyśmy mieli wkrótce dysponować narzędziem adekwatnym dla formalizacji języka potocznego. Co niekoniecznie jest tragedią – punkt widzenia języka potocznego nie jest jedynym, z jakiego oceniamy systemy formalne i ich przydatność.

W szczególności, dla każdego systemu formalnego znaleźć możemy – z potocznej perspektywy – „twarde dno” syntaktycznej analizy, czyli taki poziom wyrażań, który traktowany jest jako minimalny (innymi słowy taki, że wyrażenia owego poziomu traktowane są jako dalej już niepodzielne – z punktu widzenia owego systemu – całości sensowne, czy też poprawnie zbudowane najmniejsze „cegietki”).



I tak, w Klasycznym Rachunku Zdań najmniejszymi „cegiełkami” są zdania proste, za pomocą spójników zdaniowych wiązane w zdania złożone.

W języku KRZ występować zatem będą tylko symbole o tych dwóch kategoriach syntaktycznych: **zdania** i **spójniki zdaniowe** (funktory zdaniotwórcze od argumentów zdaniowych).

Ponieważ zaś, w duchu odpowiedzi F, jedyna semantycznie interesująca własność zdań to ich **wartość logiczna**, więc cała semantyka języka KRZ będzie się sprowadzała do manipulowania symbolami **0** i **1** – reprezentującymi, odpowiednio, Fałsz i Prawdę.

W myśl logicznej koncepcji języka każdy język można scharakteryzować za pomocą trzech rodzajów reguł:

- słownikowych,
- składniowych,
- znaczeniowych.

Języki formalne tym się różnią od nieformalnych, że dla ich określenia wystarczą dwie pierwsze grupy reguł. Tym niemniej, definiując język KRZ, podamy również jego semantykę.

- 1 Czym są zdania? Co znaczą i co oznaczają?
- 2 Język Klasycznego Rachunku Zdań – syntaktyka**
- 3 Język Klasycznego Rachunku Zdań – semantyka
- 4 Schematy zdań języka potocznego w języku KRZ
- 5 Metoda zerojedynkowa

## Definicja 1: symbol języka KRZ

Symbolami języka KRZ nazywamy:

- (i)  $p, q, r, \dots$  (zmienne zdaniowe)
- (ii)  $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists, \downarrow, \uparrow$  (spójniki zdaniowe)
- (iii)  $(, )$  (znaki techniczne – nawiasy)

[definicja ta ustala alfabet języka KRZ]

## Definicja 2: wyrażenie języka KRZ

**Wyrażeniem** języka KRZ nazywamy każdy skończony ciąg symboli tego języka.

Kilka przykładów wyrażeń języka KRZ:

- $ppppppppppppppp\neg$
- $\neg(p \leftrightarrow q)$
- $(\neg)(\wedge)(\vee) \vee \vee /$

[definicja ta określa, w jaki sposób z symboli języka KRZ będziemy budować złożone całości]

## Definicja 3: formuła języka KRZ

- (i) *każda zmienna zdaniowa jest formułą języka KRZ;*
- (ii) *jeżeli wyrażenie  $A$  jest formułą języka KRZ, to wyrażenie  $\neg A$  również jest formułą języka KRZ;*
- (iii) *jeżeli wyrażenia  $A$  i  $B$  są formułami języka KRZ, to wyrażenia  $(A \vee B)$ ,  $(A \wedge B)$ ,  $(A \rightarrow B)$ ,  $(A \leftrightarrow B)$ ,  $(A \underline{\vee} B)$ ,  $(A \underline{\downarrow} B)$ ,  $(A \uparrow B)$  również są formułami języka KRZ;*
- (iv) *nie ma innych formuł zdaniowych języka KRZ oprócz zmiennych zdaniowych i tych wyrażen, które można skonstruować zgodnie z punktami (ii) i (iii).*

[definicja ta określa, które z wyrażen – skończonych ciągów symboli – języka KRZ uznawać będziemy za gramatycznie poprawne]

Kilka przykładów formuł języka KRZ:

- |   |                                   |   |
|---|-----------------------------------|---|
| 1 | $p$                               | zmienna zdaniowa – pkt (i) definicji 3. |
| 2 | $q$                               | j.w.                                    |
| 3 | $(\neg p)$                        | z 1) i pkt (ii) definicji 3.            |
| 4 | $(\neg p \vee q)$                 | z 3), 2) i pkt (iii) definicji 3.       |
| 5 | $(p \rightarrow (\neg p \vee q))$ | z 4), 1) i pkt (iii) definicji 3.       |

- 1 Czym są zdania? Co znaczą i co oznaczają?
- 2 Język Klasycznego Rachunku Zdań – syntaktyka
- 3 Język Klasycznego Rachunku Zdań – semantyka**
- 4 Schematy zdań języka potocznego w języku KRZ
- 5 Metoda zerojedynkowa



Zdefiniowaliśmy reguły słownikowe i składniowe języka KRZ: wiemy jakie symbole w nim występują i jak budować poprawne wyrażenia złożone. Ale nie wiemy jeszcze, co to wszystko znaczy.

Żeby móc zdefiniować reguły semantyczne języka KRZ, musimy zatrzymać się przez chwilę przy dwóch zasadniczych założeniach, na których ufundowana jest logika klasyczna:

**założeniu dwuwartościowości**, które stwierdza, że każde zdanie przyjmuje jedną i tylko jedną z dwóch wartości logicznych (**0** albo **1**);

**założeniu ekstensjonalności**, które stwierdza, że wszystkie spójniki zdaniowe są spójnikami ekstensjonalnymi.

To pierwsze jest mniej więcej jasne. Przyjrzymy się więc bliżej temu drugiemu.

Rozważmy zdanie:

Jaś umył nogi i Jaś umył ręce.

Jego wartość logiczna zależy od tego, czy Jaś umył nogi i czy umył ręce. Jeśli Jaś wymył wszystkie kończyny, zdanie to jest prawdziwe.

Załóżmy dalej, że Jaś umył nie tylko ręce i nogi, ale także zęby.

Podstawmy zdanie „Jaś umył zęby” na miejsce zdania o rękach:

Jaś umył nogi i Jaś umył zęby.

Jaka jest wartość logiczna tego zdania?

# Ekstenjonalność

Rzecz jasna, jest ono prawdziwe. Co więcej, jeżeli jako argumentów spójnika zdaniowego „i” użyjemy jakichkolwiek dwóch prawdziwych zdań (niezależnie od tego, czy będą one ze sobą treściowo powiązane, czy nie), w efekcie otrzymamy zdanie prawdziwe – zakładając, że w zdaniu takim (o strukturze: „ $A$  i  $B$ ”) będzie nam chodziło tylko o to, że jest tak jak głosi zdanie  $A$  oraz jest tak jak głosi zdanie  $B$ . Użyty w takim znaczeniu spójnik „i” jest spójnikiem **ekstensjonalnym**.

## Zdaniowy spójnik ekstensjonalny

to spójnik zdaniowy który ma tę własność, że wartość logiczna zdania zbudowanego przy jego użyciu zależy wyłącznie od:

- (i) charakterystyki prawdziwościowej spójnika oraz
- (ii) wartości logicznych (-ej) jego argumentów (-u).

# Ekstenjonalność

Rzecz jasna, jest ono prawdziwe. Co więcej, jeżeli jako argumentów spójnika zdaniowego „i” użyjemy jakichkolwiek dwóch prawdziwych zdań (niezależnie od tego, czy będą one ze sobą treściowo powiązane, czy nie), w efekcie otrzymamy zdanie prawdziwe – zakładając, że w zdaniu takim (o strukturze: „ $A$  i  $B$ ”) będzie nam chodziło tylko o to, że jest tak jak głosi zdanie  $A$  oraz jest tak jak głosi zdanie  $B$ . Użyty w takim znaczeniu spójnik „i” jest spójnikiem ekstensjonalnym.

## Zdaniowy spójnik ekstensjonalny

to spójnik zdaniowy który ma tę własność, że wartość logiczna zdania zbudowanego przy jego użyciu zależy wyłącznie od:

- (i) charakterystyki prawdziwościowej spójnika oraz
- (ii) wartości logicznych (-ej) jego argumentów (-u).

Rozważmy dla odmiany zdanie:

Jaś wierzy, że  $2+2 = 4$ .

Jego prawdziwość zależy od stanu przekonań Jasia. Jeśli Jaś rzeczywiście wierzy, że suma 2 i 2 to 4, zdanie to jest prawdziwe. Załóżmy, że Jaś nie jest zwolennikiem alternatywnej arytmetyki.

A jeśli na miejsce „ $2+2 = 4$ ”, czyli zdaniowego argumentu spójnika „wierzy, że”, wstawimy np. zdanie „Księżyc jest jedynym naturalnym satelitą Ziemi”?

Na miejsce zdania prawdziwego wstawiamy inne zdanie prawdziwe. Ale czy mamy gwarancję, że zdanie

Jaś wierzy, że Księżyc jest jedynym naturalnym satelitą Ziemi.

jest prawdziwe, tak jak zdanie o arytmetycznych przekonaniach Jasia?

Nie mamy takiej gwarancji. Spójnik „wierzy, że” jest spójnikiem **intensjonalnym** – wartość logiczna zdania złożonego przy jego użyciu zależy od czegoś więcej niż tylko wartość logiczna argumentów. Dla wartości logicznej zdań:

- Jaś wierzy, że  $2+2 = 4$ .
- Jaś wierzy, że Księżyc jest jedynym naturalnym satelitą Ziemi.

istotny jest stan przekonań Jasia – a nie jest powiedziane, że Jaś musi wierzyć w każdą prawdę (i nie wierzyć w żaden fałsz).

Żeby zdefiniować spójnik ekstensjonalny wystarczy zatem określić, jak wygląda wartość logiczna zdania złożonego przy jego użyciu, w zależności od wartości logicznych argumentów. Można to zrobić w sposób mniej lub bardziej rozwlekły; ograniczymy beletrystykę do minimum, zbierając definicje interesujących nas spójników ekstensjonalnych:

$$\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \underline{\vee}, \downarrow, \uparrow$$

w tzw. **tabelach prawdziwościowych** (aka macierzach spójników).

- symbol:  $\neg$
- symbole alternatywne:  $\bar{\phantom{A}}$ ,  $\sim$
- prozą: „nieprawda że”

$A$	$\neg A$
1	0
0	1



# Koniunkcja

- symbol:  $\wedge$
- symbole alternatywne:  $\&$ ,  $\bullet$
- prozą: „i”

$A$	$B$	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

# Alternatywa (zwykła, nierozłączna)

- symbol:  $\vee$
- prozą: „lub”

$A$	$B$	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

# Alternatywa rozłączna

- symbol:  $\underline{\vee}$
- prozą: „albo ... albo ...”

$A$	$B$	$A \underline{\vee} B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

# Implikacja

- symbol:  $\rightarrow$
- symbole alternatywne:  $\Rightarrow$ ,  $\supset$
- prozą: „jeżeli ... to ...”

$A$	$B$	$A \rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

- symbol:  $\leftrightarrow$
- symbole alternatywne:  $\Leftrightarrow$ ,  $\equiv$
- prozą: „wtedy i tylko wtedy, gdy”

$A$	$B$	$A \leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

# Dysjunkcja

- symbol:  $\uparrow$
- prozą: „co najwyżej jedno z dwojga”

$A$	$B$	$A \uparrow B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

- symbol:  $\downarrow$
- prozą: „ani ... ani ...”

$A$	$B$	$A \downarrow B$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

# Opuszczanie nawiasów

Żeby oszczędzić sobie nieco rysowania przyjmujemy następującą konwencję co do opuszczania nawiasów:

- 1 nie będziemy stawiać nawiasów zewnętrznych, wokół całych formuł;
- 2 przyjmujemy następującą hierarchię siły wiązania spójników:
  - 1  $\neg$
  - 2  $\wedge, \vee$
  - 3  $\rightarrow, \leftrightarrow, /, \downarrow, \underline{\vee}$



Przyjrzyjmy się formule następującej, zapisanej zgodnie z definicją 3:

$$((p \wedge \neg r) \rightarrow (\neg p \vee q))$$

Pozbądźmy się teraz nawiasów, zgodnie z konwencją:

- nie będziemy stawiać nawiasów zewnętrznych, wokół całych formuł:

$$(p \wedge \neg r) \rightarrow (\neg p \vee q)$$

- spójniki  $\wedge$  i  $\vee$  wiążą silniej niż  $\rightarrow$ :

$$p \wedge \neg r \rightarrow \neg p \vee q$$

## A teraz coś zupełnie innego!

Co mają ze sobą wspólnego zdania:

- Jeżeli Jaś kocha Małgosię, to jest narażony na kontakty z mamą Małgosi.

oraz

- Jeżeli Księżyc jest zbudowany z żółtego sera, to na Marsie żyją małe, zielone ludziki.

?

Wspólna jest ich **struktura**:

- Jeżeli **Jaś kocha Małgosię**, to **jest narażony na kontakty z mamą Małgosi**.
- Jeżeli **Księżyc jest zbudowany z żółtego sera**, to **na Marsie żyją małe, zielone ludziki**.
- Jeżeli , to .

# Schematy zdań

Schemat zdania (języka potocznego) w języku KRZ otrzymujemy, zastępując spójniki zdaniowe ich symbolicznymi odpowiednikami, zaś zdania proste, które te spójniki wiążą – zmiennymi zdaniowymi.

Schematem zdań o strukturze:

Jeżeli , to .

jest formuła:

$$p \rightarrow q$$

albo jakakolwiek inna, tak samo zbudowana:

$$q \rightarrow r, p \rightarrow s, r \rightarrow t, \dots$$

# Schematy zdań

Przy budowaniu schematów zdań języka potocznego w języku KRZ obowiązują dwie proste zasady:

- 1 różne zdania proste reprezentujemy różnymi zmiennymi, te same – tymi samymi;
- 2 każdy spójnik ekstensjonalny, występujący w zdaniu, musi znaleźć swoją symboliczną reprezentację w schemacie zdania.

Z uwagi na 1. schematem zdania „Jak pada deszcz, to deszcz pada” będzie, np., formuła ' $p \rightarrow p$ ', a nie ' $p \rightarrow q$ '.

Z uwagi na 2. schematem zdania „Jan nie pije, ale pali” jest, np., formuła ' $\neg p \wedge q$ ', a nie formuła ' $p$ ' bądź ' $p \wedge q$ '.

# Metoda zerojedynkowa

Znając strukturę zdania i wartości logiczne zdań prostych, z których jest ono zbudowane, możemy ustalić wartość logiczną całości, korzystając z prostych rachunków.

Rozważmy zdanie:

Jeśli Jaś wystaje codziennie pod oknami Małgosi lub wysyła jej listy na papierze w serduszka, to Małgosia nie jest mu obojętna.

Jego schematem jest formuła:

$$p \vee q \rightarrow \neg r$$

# Metoda zerojedynkowa

Założmy dalej, że Jaś wystaje pod oknami Małgosi, do listów z serduszkami się co prawda nie posunął, ale od obojętności względem Małgosi jest daleki. Zatem:

- wartość logiczna zdania, reprezentowanego zmienną  $p$  (Jaś wystaje pod oknami Małgosi) wynosi 1;
- wartość logiczna zdania, reprezentowanego zmienną  $q$  (Jaś wysyła Małgosi listy na papierze w serduszka) wynosi 0;
- wartość logiczna zdania, reprezentowanego zmienną  $r$  (Małgosia jest Jasiowi obojętna) wynosi 0.

Podstawiając wartości do formuły

$$p \vee q \rightarrow \neg r$$

otrzymujemy:

$$1 \vee 0 \rightarrow \neg 0$$

# Metoda zerojedynkowa

$$1 \vee 0 \rightarrow \neg 0$$

z definicji negacji otrzymujemy:

$$1 \vee 0 \rightarrow 1$$

$A$	$\neg A$
1	0
0	1



# Metoda zerojedynkowa

$$1 \vee 0 \rightarrow \neg 0$$

$$1 \vee 0 \rightarrow 1$$

z definicji alternatywy:

$$1 \rightarrow 1$$

$A$	$B$	$A \vee B$
1	1	1
<b>1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>
0	1	1
0	0	0

# Metoda zerojedynkowa

$$1 \vee 0 \rightarrow \neg 0$$

$$1 \vee 0 \rightarrow 1$$

$$1 \rightarrow 1$$

wreszcie, z definicji implikacji:

1

$A$	$B$	$A \rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

# Metoda zerojedynkowa

$$1 \vee 0 \rightarrow \neg 0$$

$$1 \vee 0 \rightarrow 1$$

$$1 \rightarrow 1$$

1

A zatem, jeśli Jaś wystaje pod oknami Małgosi, od obojętności względem niej jest daleki, ale do listów z serduszkami się nie posunął, to zdanie „Jeśli Jaś wystaje codziennie pod oknami Małgosi lub wysyła jej listy na papierze w serduszka, to Małgosia nie jest mu obojętna” jest **prawdziwe**.

A gdyby jednak poszalał z papierem, to czy zdanie to dalej byłoby prawdziwe? A gdyby dał spokój z wystawaniem? A gdyby ...?

# Metoda zerojedynkowa

Zdanie „Jeśli Jaś wystaje codziennie pod oknami Małgosi lub wysyła jej listy na papierze w serduszka, to Małgosia nie jest mu obojętna” zbudowane jest z trzech różnych zdań prostych. Wartości logiczne trzech różnych zdań prostych mogą poukładać się na 8 sposobów:

$p$	$q$	$r$
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

# Metoda zerojedynkowa

Korzystając z tego faktu i z ekstensjonalności spójników, przy użyciu których owo zdanie jest złożone, możemy zbudować tabelę zerojedynkową, charakteryzującą prawdziwościowe własności zdania o Jasiu i Małgosi – i każdego zdania o takiej samej strukturze.

Przepis jest prosty:

# Metoda zerojedynkowa

*Weźmiesz formułę grzeczną, dobrze narychtowaną, wedle definicji.*

*I wypiszesz zmienne zdaniowe wszystkie, co w niej występują. A bacz, co by ino różnokształtne zmienne wypisać, byś roboty nie przysparzał sobie po próżnicy.*

*I wszystkie kombinacje wartości logicznych dla zmiennych wypiszesz, a liczba ich jest  $2^n$ , a  $n$  jest liczba zmiennych w formule, ale ino tych różnokształtnych.*

*I podformuły wszystkie wypiszesz, co to ich wartości policzyć trza, co by wartość całej formuły skalkulować.*

*I liczyć będziesz wartości onych podformuł, a nie inaczej jak tylko wedle matryc, co spójniki definiują. I na boki rozglądać się nie będziesz, ino chyżo tabelkę wypełnisz, a matryce w rozumie masz mieć zapamiętane.*

# Metoda zerojedynkowa

Tabela zerojedynkowa dla formuły  $p \vee q \rightarrow \neg r$ :

$p$	$q$	$r$	$\neg r$	$p \vee q$	$p \vee q \rightarrow \neg r$
1	1	1			
1	1	0			
1	0	1			
1	0	0			
0	1	1			
0	1	0			
0	0	1			
0	0	0			

# Metoda zerojedynkowa

Tabela zerojedynkowa dla formuły  $p \vee q \rightarrow \neg r$ :

$p$	$q$	$r$	$\neg r$	$p \vee q$	$p \vee q \rightarrow \neg r$
1	1	1	0		
1	1	0	1		
1	0	1	0		
1	0	0	1		
0	1	1	0		
0	1	0	1		
0	0	1	0		
0	0	0	1		

$A$	$\neg A$
1	0
0	1



# Metoda zerojedynkowa

Tabela zerojedynkowa dla formuły  $p \vee q \rightarrow \neg r$ :

$p$	$q$	$r$	$\neg r$	$p \vee q$	$p \vee q \rightarrow \neg r$
1	1	1	0	1	
1	1	0	1	1	
1	0	1	0	1	
1	0	0	1	1	
0	1	1	0	1	
0	1	0	1	1	
0	0	1	0	0	
0	0	0	1	0	

$A$	$B$	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

# Metoda zerojedynkowa

Tabela zerojedynkowa dla formuły  $p \vee q \rightarrow \neg r$ :

$p$	$q$	$r$	$\neg r$	$p \vee q$	$p \vee q \rightarrow \neg r$
1	1	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	0	1
0	0	0	1	0	1

$A$	$B$	$A \rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Nb. tabela dla zdania:

„Jeśli w okolicy znajduje się Kura-Samograjka lub Uczone są Łososie, to nie będzie również kłopotu ze spotkaniem Kota w Butach’’

będzie wyglądała dokładnie tak samo. Dlaczego?

# Metoda zerojedynkowa

Z uwagi na własności prawdziwościowe formuł języka KRZ wyróżnić możemy ich trzy rodzaje:

## Tautologie

to formuły, które dla każdej kombinacji wartości logicznych zmiennych przyjmują wartość 1.

## Kontrtautologie

to formuły, które dla każdej kombinacji wartości logicznych zmiennych przyjmują wartość 0.

## Formuły syntetyczne

pozostałe.

Uff 😊

## Pozostanie:

- Pojęcie zdania w sensie logicznym;
- Syntaktyka języka KRZ: symbol, wyrażenie, formuła;
- Dwuwartościowość, ekstensjonalność, intensjonalność;
- Semantyka języka KRZ: tabele spójników;
- Schematy zdań języka potocznego w języku KRZ;
- Metoda zerojedynkowa. Pojęcia: tautologia, kontrtautologia, formuła syntetyczna.